Fin de l'exercice 8

Il s'agit de montrer par récurrence sur n que la suite définie sur $\mathbf{N}^*$ par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ vérifie

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n \leq 2\sqrt{n}$$

Pour $n = 1$ $S_1 = 1$ donc la propriété est bien vérifiée pour $n = 1$
On suppose qu'il existe un entier naturel k $(k \geq 1)$ tel que $S_k \leq 2\sqrt{k}$
$S_{k+1} = S_k + \dfrac{1}{k+1}$
D'après l'hypothèse de récurrence,
$S_{k+1} \leq 2\sqrt{k} + \dfrac{1}{k+1}$
Montrons alors que $2\sqrt{k} + \dfrac{1}{k+1} \leq 2\sqrt{k+1}$
$2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} = 2\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$
Or, quel que soit l'entier k tel que $k \geq 1$, $\sqrt{k} \leq k$ et $\sqrt{k+1} < k+1$ donc par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, $2\dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} > \dfrac{2}{2k+1} > \dfrac{1}{k+1}$
Ainsi la propriété est héréditaire et la propriété est établie.

Exemple 2 :

1. $x < \lfloor x \rfloor + 1 \iff \lfloor x \rfloor > x - 1$
2. $u_n = \dfrac{\lfloor ne \rfloor}{n}$
   Pour $x = ne$ dans l'inégalité établie dans la question précédente, on obtient :
   $ne - 1 < \lfloor ne \rfloor \leq ne$
   En divisant par $n > 0$
   $e - \dfrac{1}{n} < u_n \leq e$
   Il suffit ensuite d'appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir que
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = e$$
3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$
   $ke - 1 < \lfloor ke \rfloor \leq ke$
   En sommant membre à membre, on obtient :
   $\sum_{k=1}^{n}(ke-1) < \sum_{k=1}^{n} \lfloor ne \rfloor \leq \sum_{k=1}^{n} ke$
   On multiplie ensuite par $\dfrac{1}{n^2} > 0$:
   $\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(ke-1) < v_n \leq \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ke$
   Or, $\sum_{k=1}^{n} ke = e\dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n}(ke-1) = e\dfrac{n(n+1)}{2} - n$
   D'où :
   $$\frac{e(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} < v_n \leq \frac{e(n+1)}{2n}$$

En appliquant le théorème des gendarmes, il vient :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{e}{2}$$

Exemple 5 :

1. Soit $a \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{N}^*$: $\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$ donc en multipliant par k :

$$k\lfloor a \rfloor \leq ka < k\lfloor a \rfloor + k$$

   On a aussi

$$\lfloor ka \rfloor \leq ka < \lfloor ka \rfloor + 1$$

   $\lfloor ka \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à ka donc

$$\lfloor ka \rfloor \geq k\lfloor a \rfloor$$

   D'où, par transitivité de la relation d'ordre,

$$k\lfloor a \rfloor \leq \lfloor ka \rfloor < k\lfloor a \rfloor + k$$

   En soustrayant $k\lfloor a \rfloor$ à chaque membre, on obtient :

$$0 \leq \lfloor ka \rfloor - k\lfloor a \rfloor < k$$

2. En posant $k = p$ et $a = p^n x$, on obtient alors

$$0 \leq \left\lfloor p^{n+1}x \right\rfloor - p\lfloor p^n x \rfloor \leq p - 1$$

   Or, $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{p^{n+1}}(\lfloor p^{n+1}x \rfloor - p\lfloor p^n x \rfloor)$
   Donc

$$0 \leq a_{n+1} - a_n \leq \frac{p-1}{p^{n+1}}$$

3. D'après la question précédente, la suite (a_n) est croissante
   $b_{n+1} - b_n = a_{n+1} - a_n + \dfrac{1}{p^{n+1}} - \dfrac{1}{p^n} \leq 0$ (on remarque que $\dfrac{p-1}{p^{n+1}} = \dfrac{1}{p^n} - \dfrac{1}{p^{n+1}}$ et on applique la question précédente)
   Ainsi, (b_n) est une suite décroissante
   De plus, $b_n - a_n = \dfrac{1}{p^n}$, $p \geq 2$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$
   On a établi que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et donc qu'elles convergent vers un même réel L.
4. Pour $x \in \mathbf{R}$, $p \geq 2$, $\lfloor p^n x \rfloor \leq p^n x < \lfloor p^n x \rfloor + 1$
   En divisant par p^n, on obtient :

$$a_n \leq x < b_n$$

   Par passage à la limite, on obtient : $L \leq x \leq L$ d'où

$$L = x$$